TITRE DE LA LEÇON : RACINES CARREES D'UN NOMBRE REEL
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Algèbre
Niveau : Collège - Classe : Troisième

I-Notion de racine carrée et propriétés opératoires

Activité :

a) *Calcule les carrées des nombres suivants : 9 ; 5 et 4.*
b) *Identifie les nombres 9 ; 5 et 4 par rapport à leur carrés.*
c) *On pose :* $m = 9$ *et* $n = 4$. *Recopie et complète le tableau ci-dessous :*

$\sqrt{m}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{m^2}$	$(\sqrt{n})^2$	$\sqrt{m \times n}$	$\sqrt{m} \times \sqrt{n}$	$\sqrt{\frac{m}{n}}$	$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$

d) *Compare* $\sqrt{m \times n}$ *et* $\sqrt{m} \times \sqrt{n}$; $\sqrt{\frac{m}{n}}$ *et* $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$; $\sqrt{m^2}$ *et* $|m|$; $(\sqrt{n})^2$ *et n.*

Je retiens :

1-Notion de racine carrée

Soient a et b deux nombres réels positifs.

✓ *On appelle racine carrée de **a** : notée:* $\sqrt{a}$ *, le nombre réel b dont le carré est **a** :* $b^2 = a$.
Donc $\sqrt{a} = b$ *si, et seulement si* $b^2 = a$

$\sqrt{a}$ *: se lit « Racine carrée de **a** ou radical de **a** » ; le symbole* $\sqrt{}$ *est appelé : radical et **a** est le radicande.* ***Exemples*** *:* $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{25} = 5$.

✓ ***Un carré parfait****, est un nombre dont la racine carrée donne un nombre entier.*

Exemples *:* $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{36} = 6$; ....
Ainsi : 4 ; 9 ;16 ; 25 ; 36,... sont des carrés parfaits.

Remarque :

✓ $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$;
✓ *Si a un nombre réel positif tel que* $b^2 = a$*, alors :*$b = \sqrt{a}$ *ou* $b = -\sqrt{a}$ *.*
Donc $\sqrt{a}$ *et* $-\sqrt{a}$ *sont les racines carrées de a.*

Exemple *: Si* x^2 *=9, alors* $x = \sqrt{9}$ *ou* $x = -\sqrt{9}$*. Soit,* $x = 3$ *ou* $x = -3$.
Si x est positif, tel que : x^2 *=9, alors* $x = \sqrt{9}$ *Soit,* $x = 3$ *.*

2- Propriétés ou règles opératoires

- $\sqrt{\boldsymbol{a}^2} = |\boldsymbol{a}|$ *où **a** est un réel ;*
- $(\sqrt{\boldsymbol{a}})^2 = \boldsymbol{a}$ *où **a** est réel un positif ;*
- $\sqrt{\boldsymbol{a}} \times \sqrt{\boldsymbol{b}} = \sqrt{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}$ *où **a** et **b** sont des réels positifs ;*
- $\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{b}}}$*; où **a** et **b** sont des réels positifs, avec* $b \neq 0$ *;*
- $\sqrt{\boldsymbol{a}^{2n}} = \sqrt{(\boldsymbol{a}^n)^2} = \boldsymbol{a}^n$ ***; n*** *un nombre entier relatif et **a** est un réel ;*
- $\sqrt{\boldsymbol{a}^{2n+1}} = \sqrt{(\boldsymbol{a}^n)^2 \times \boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}^n\sqrt{\boldsymbol{a}}$ ***; n*** *un nombre entier relatif et **a** est un réel*

Exemples : $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$; $(\sqrt{7})^2 = 7$; $\sqrt{5^2} = |5| = 5$; $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$;

$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = -1+\sqrt{2}$, *car* $(1-\sqrt{2}) < 0$

II-Calculs sur les radicaux

1- Ecriture des radicaux sous la forme $a\sqrt{b}$ et addition des radicaux.

Activité : On se propose d'écrire $\sqrt{48}$ sous la forme : $a\sqrt{3}$ et de calculer :

$S = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{48} + \sqrt{2}$ *, avec **a** un entier naturel.*

- *a- Décompose 48 en produit de facteurs premiers.*
- *b- Forme les carrés pour les facteurs égaux.*
- *c- Applique les propriétés des racines carrées pour le calcul de $\sqrt{48}$.*
- *a- Ecris les radicaux $\sqrt{75}$; $\sqrt{12}$ et $\sqrt{27}$ sous la forme $a\sqrt{b}$; a et b sont des entiers.*
- *b- Fais la somme des termes de S qui ont le même radicande.*

Je retiens :

- ***Ecriture des radicaux sous la forme $a\sqrt{b}$:*** *Pour écrire la racine carrée $\sqrt{m}$ sous la forme $a\sqrt{b}$,*
- — *On décompose le réel m en produit de facteurs premiers ;*
- — *On forme les carrées pour les facteurs égaux ;*
- — *On applique la propriété $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ des racines carrées pour le calcule de $\sqrt{m}$*
- ***Radicaux semblables :***

  Deux ou plusieurs radicaux sont semblables, s'ils ont le même radicande.
- ***Addition des radicaux :***

Pour additionner des radicaux :

- ✓ *On écrit chaque radical sous la forme $a\sqrt{b}$; où a et b sont des entiers naturels ;*
- ✓ *On regroupe les termes (ou radicaux) semblables (si possible) ;*
- ✓ *On fait la somme des radicaux ou termes semblables : $n\sqrt{a} + m\sqrt{a} = (n+m)\sqrt{a}$ où n et m sont des entiers.*

2-Multiplication et division des radicaux

Activité : On se propose d'écrire $q = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ sans radical au dénominateur.

- *a- Multiple le numérateur et le dénominateur de q par l'expression $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ et nomme cette expression.*
- *b- Utilise la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :*
- *c- $(m+n)(a+b) = m \times a + m \times b + n \times a + n \times b$ pour calculer l'expression : $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ et $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ tout en regroupant*

les termes semblables ;

- *d- Effectue le quotient q, puis donne son résultat simplifié.*

Je retiens :

- ***Multiplication des radicaux :*** *Pour multiplier des radicaux, on :*
- ✓ *Utilise la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition*
- ✓ *Regroupe les termes semblables (si possible)*
- ✓ *Calcule les coefficients des radicaux semblables (ou on calcule les termes semblables) :*

  $n\sqrt{a} \times m\sqrt{b} = (n \times m)\sqrt{a \times b}$; $n\sqrt{a} \times \sqrt{b} = n\sqrt{a \times b}$.
- ***Division des radicaux***

— *Pour trouver le quotient des radicaux où le dénominateur contient un seul radical isolé, on :*

- ✓ *Multiple le numérateur et le dénominateur par le radical du dénominateur.*
  (On rend rationnel : On chasse le radical au dénominateur.) ;
- ✓ *Effectue les calculs, puis on donne le résultat.*

Exemple : Calcul de : $B = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. *On a :* $B = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3\times 2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

— *Pour trouver le quotient des radicaux où le radical du dénominateur est associé ou pour rendre rationnel le dénominateur de l'expression proposée, on :*

- ✓ *Multiple le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur.*
- ✓ *Effectue les calculs, puis on donne le résultat simplifié.*

NB :

-L'expression conjuguée de $a - \sqrt{b}$ *est* $a + \sqrt{b}$, *celle de* $a + \sqrt{b}$, *est* $a - \sqrt{b}$.

-L'expression conjuguée de $-a - \sqrt{b}$ *est* $-a + \sqrt{b}$, *celle de* $-a + \sqrt{b}$, *est* $-a - \sqrt{b}$.

-L'expression conjuguée de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ *est* $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, *celle de* $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, *est* $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

-L'opposé de $-a - \sqrt{b}$ *est* $a + \sqrt{b}$

-Le produit d'une expression par son expression conjuguée, donne une identité remarquable de la forme : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Exemple : Calcul de : $B = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$. *On a*

$B = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{6}+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2+\sqrt{6}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{6}+3+2}{2-3}. = -5 - 2\sqrt{6}$

Exercice 1 : *Ecris* $\sqrt{128}$ *sous la forme :* $a\sqrt{b}$

Solution : J'écris $\sqrt{128}$ *sous la forme :* $a\sqrt{b}$

$128 = 2^7 = 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2.$

Donc $\sqrt{128} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2} = 2 \times 2 \times 2\sqrt{2}$;

$\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$.

Exercice 2 : *Calcul :* $A = \sqrt{18} - 2\sqrt{12} + 4\sqrt{8}$

Solution : je calcule A

$A = \sqrt{3^2 \times 2} - 2\sqrt{2^2 \times 3} + 4\sqrt{2^2 \times 2}$;

$A = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 8\sqrt{2}$;

$A = (3+8)\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$;

$A = 11\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$.

Exercice 3 : *Calcul :* $B = (\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$

Solution : Je calcule B

$B = \sqrt{2} \times (\sqrt{2} - \sqrt{3}) - \sqrt{3} \times (\sqrt{2} - \sqrt{3})$;

$B = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times (-\sqrt{3}) - \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times (-\sqrt{3})$;

$B = -2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$.

Exercice 4 :

Ecris sans radical au dénominateur (ou rends rationnel le dénominateur), chacune des expressions suivantes : $A = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}}$; $B = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; $C = \frac{\sqrt{2}-5}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$