TITRE DE LA LEÇON : CALCULS APPROCHES
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Algèbre
Niveau : Lycée - Classe : Seconde C

I- Comparaison des nombres réels

1- Ordre dans $\mathbb{R}$: Propriétés a, b et c désignent les nombres réels

- Si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$;
- Si $a < b$ et $\begin{cases} si\ c < 0, \text{alors: } a \times c > b \times c \\ si\ c > 0, \text{alors: } a \times c < b \times c \end{cases}$;
- Si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$;
- Si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$;
- Si a et b sont positifs, alors : $\begin{cases} si\ a \leq b\ , \text{alors } a^2 \leq b^2 \\ si\ a^2 \leq b^2, \text{alors } a \leq b \end{cases}$.Donc $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$
- Si a et b sont négatifs, alors : $\begin{cases} si\ a \leq b\ , \text{alors } a^2 \geq b^2 \\ si\ a^2 \geq b^2, \text{alors } a \leq b \end{cases}$.Donc $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$
- Si $a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$;
- $\begin{cases} si\ 0 < a < 1, \text{alors } a^3 < a^2 < a \\ \quad si\ a > 1, \text{alors } a^3 > a^2 > a \end{cases}$;
- $a \leq a$.
- $a^2 = b^2 \Leftrightarrow : a = b\ ou\ a = -b$

2- Règles de comparaison :

Pour comparer deux nombres réels a et b, on peut :

- Etudier le signe de leur différence : $a - b$ ou $b - a$;
- Etudier le signe de la différence de leur carré :
  $a^2 - b^2$ ou $b^2 - a^2$;
- Etudier le signe de la différence de leurs racines carrés (s'ils sont positifs):
  $\sqrt{b} - \sqrt{a}$ ou $\sqrt{a} - \sqrt{b}$;
- Comparer leur inverse ;
- Les comparer à un nombre intermédiaire : si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$;
- on peut calculer leur quotient $\frac{a}{b}$ (s'ils sont positifs): $\begin{cases} si\ \frac{a}{b} < 1, \text{alors } a < b \\ si\ \frac{a}{b} > 1, \text{alors } a > b \end{cases}$;

II- Valeurs approchées et opérations sur les encadrements

1-Notion de valeur approchée

Soient x et a deux nombres réels et r un nombre réel strictement positif.

$\boldsymbol{a}$ est une valeur approchée de x à r près, si et seulement si, $|x - r| \leq r$, soit :
$a - r \leq x \leq a + r$.

On note : $x \approx a$ à r près.

$\boldsymbol{a - r}$: Une valeur approchée de x par défaut à r près ;

$\boldsymbol{a + r}$: Une valeur approchée de x par excès à r près.

$\boldsymbol{a-r \leq x \leq a+r}$: Un encadrement de x

2-Approximations décimales d'un nombre réel

- Une approximation décimale d'ordre n d'un nombre réel x ($n \in \mathbb{N}$), **est** une valeur approchée de x à 10^{-n} près.
- Une approximation décimale d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) par défaut (ou une troncature d'ordre n ou encore une valeur approchée à 10^{-n} près par défaut) d'un nombre réel x, est une valeur approchée de x obtenue en ne conservant que les n premiers chiffres après la virgule de l'écriture décimale de x.
- Une approximation décimale d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) par excès (ou un arrondi d'ordre n ou encore une valeur approchée à 10^{-n} près par excès) d'un nombre réel x, est une valeur approchée de x obtenue en ajoutant 1 à la $n^{-ième}$ décimale de la troncature de x.

Exemple : $\pi = 3{,}141\ 592\ 654....$

3,14 est une troncature de π, d'ordre 2. On écrit : $\pi \approx 3{,}14$ à 10^{-2} près par défaut.

3,15 est un arrondi de π, d'ordre 2. On écrit : $\pi \approx 3{,}15$ à 10^{-2} près par excès.

Ainsi : $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ est un encadrement de π à 10^{-2} près.

3-Opérations sur les encadrements d'un nombre réel

a , b, c, d, x et y désignent les nombres réels.

- Si a $< x < b$ et $c < y < d$, alors : $a + c < x + y < b + d$;
- Si $\boldsymbol{a} < x < b$ et $c < y < d$, alors : $-d < -y < -c$ et $a - d < x - y < b - c$;
- Si $\boldsymbol{a} < x < b$ et $c < y < d$, alors : $a \times c < xy < b \times d$ (x et y même signe)
- Si $\boldsymbol{a} < x < b$ et $c < y < d$, alors : $\frac{1}{d} < y < \frac{1}{c}$ et $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{d}} < \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} < \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}$

Exercice1 : Soit le nombre réel : $P = \left|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right| \times \left|-5\sqrt{2} + 3\sqrt{3}\right|$

a) Ecrire P sans valeur absolue.

b) Calculer P et montrer qu'il peut s'écrire sous la forme : $48 - 19\sqrt{6}$

c) Déterminer, alors un encadrement de P à 10^{-3} près, sachant que : $2,44948 < \sqrt{6} < 2{,}44949$. En déduire une valeur approchée de P à 10^{-3} près par défaut

Exercice 2 :

On donne : $5{,}12 < a < 5{,}13$ et $-6{,}14 < b < -6{,}13$.

a) Déterminer un encadrement de: $a \times b$, $b - a$ et $\frac{a}{b}$ à 10^{-2} près.

b) En déduire un encadrement du réel $x = \frac{b-a}{3} + a.b$ à 10^{-2} près.