TITRE DE LA LEÇON : CALCULS SUR LES NOMBRES RATIONNELS ET SUR LES PUISSANCES

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Algèbre

Niveau : Lycée - Classe : Seconde C

I- Calculs sur les nombres rationnels : CALCULS SUR LES NOMBRES

Pour tous nombres réels a, b, c et d tels que : $bd \neq 0$ et $c \neq 0$

- $\frac{a}{1} = a$; $\frac{b}{b} = 1$; $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} \Leftrightarrow ad = bc$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$; $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} + \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{a \times d}}{\boldsymbol{b \times d}}$; $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \times \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{a \times c}}{\boldsymbol{b \times d}}$; $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} : \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \times \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{c}} = \frac{\boldsymbol{a \times d}}{\boldsymbol{b \times c}}$.

NB : $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ est une fraction irréductible, si et seulement si, $\boldsymbol{PGCD(a;b) = 1}$

II-Calculs sur les puissances

1- Propriétés opératoires : a et b désignent les nombres réels non nuls ; n, m et p les nombres entiers ou réels

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$; $a^n \times a^m \times a^p = a^{n+m+p}$; $(a \times b)^n = a^n \times b^n$; $(a^n)^m = a^{n \times m}$;
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^{-1} = \frac{1}{a}$ est l'inverse de a ;
- $(-a)^n = \begin{cases} -a^n \text{ si } n \text{ est impair} \\ a^n \quad \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$; $(-1)^n = \begin{cases} -1 \text{ si } n \text{ est impair} \\ 1 \quad \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$.

2- Notation scientifique et ordre de grandeur :

— On appelle notation scientifique d'un nombre décimal, une écriture de la forme **:** $\boldsymbol{a.10^p}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et **a** est un nombre décimal, ayant un seul chiffre, non nul avant la virgule : $1 \leq a < 10$ ou $-10 < a \leq -1$ c-à-d $1 \leq |a| < 10$

Exemples : La notation scientifique de 1785000, est : $1785000 = 1{,}785 \times 10^6$

La notation scientifique de 0,0025, est :$0{,}0025 = 0002{,}5 \times 10^{-3} = 2{,}5 \times 10^{-3}$

— Pour trouver l'ordre de grandeur d'un résultat x (ou d'une opération), on écrit la notation scientifique de $x = \boldsymbol{a.10^p}$**,** puis on arrondit $\boldsymbol{a}$ à la dizaine la plus proche.

Exemples : L'ordre de grandeur de 1785000 est : 10^7

3- Opérations sur les nombres écrits sous la forme : $\boldsymbol{a.10^p}$:

- $a \times 10^p + b \times 10^p = (a + b) \times 10^p$
- $a.10^p \times b.10^q = (a \times b)(10^p \times 10^q) = (a \times b).10^{p+q}$.
- $\frac{a \times 10^p}{b \times 10^q} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \times 10^{p-q}$ avec $b \neq 0$

4- Encadrement et comparaison des nombres décimaux écrits sous la forme : $\mathrm{a}.10^{\mathrm{p}}$:

Règle1 : Pour encadrer un nombre décimal : $x = a \times 10^{p}$, on trouve d'abord sa notation scientifique $x = \beta \times 10^{m}$, puis on encadre $\beta \times 10^{m}$ par deux puissances de 10 d'exposants entiers consécutifs, en appliquant les propriétés de l'ordre dans

Exemple : Encadrement de : $x = 879 \times 10^{9} = 8{,}79 \times 10^{11}$

On a $10^{0} < 8{,}79 < 10^{1} \Rightarrow 10^{0} \times 10^{11} < 8{,}79 \times 10^{11} < 10^{1} \times 10^{11}$

Donc **:** $10^{11} < 8{,}79 \times 10^{11} < 10^{12}$

Règle2 : Pour comparer deux nombres décimaux $x = a \times 10^{p}$ et $y = b \times 10^{q}$ on trouve d'abord leur notation scientifique: $x = \beta \times 10^{m}$ et $y = \alpha \times 10^{n}$.
Si $m \neq n$, alors x et y sont rangés dans le même ordre que n et m (en comparant m et n) ; si $m = n$ alors x et y sont rangés dans le même ordre que β et α (en comparant β et α) ;

Exemples : a) Comparaison de : $x = 479 \times 10^{-8} = 4{,}79 \times 10^{-6}$ et $y = 43 \times 10^{-7} = 4{,}3 \times 10^{-6}$. Comme $4{,}79 > 4{,}3$, alors : $479 \times 10^{-8} > 43 \times 10^{-7}$

b) Comparaison de : $A = 876 \times 10^{-10} = 8{,}76 \times 10^{-8}$ et$B = 43 \times 10^{-8} = 4{,}3 \times 10^{-7}$. Comme $-7 > -8$, alors : $43 \times 10^{-8} > 876 \times 10^{-10}$

EXERCICES

Exercice 1 :

1- Effectuer les calculs : $\mathrm{E} = \dfrac{\left[(-12)^{-8}\right]^{-2} \times 75^{-4} \times (-4)^{-9}}{(25^{-2})^{4} \times 18^{6} \times (10)^{4}}$; $\mathrm{A} = \dfrac{-a^{2} \times \left(2 \times a^{-3} \times b^{2}\right)^{-2}}{(4 \times a^{-2} \times b^{-1})^{-2}}$.

2- On donne : $\mathrm{E} = \dfrac{2\mathrm{a}^{2}\mathrm{b}^{2}(8\mathrm{b}^{2} - 18\mathrm{a}^{2}) + 4\mathrm{a}^{2}\mathrm{b}^{2}(4\mathrm{b}^{2} + 12\mathrm{ab} + 9\mathrm{a}^{2})}{8\mathrm{ab}^{2} + 12\mathrm{a}^{2}\mathrm{b}}$

a- Simplifier E.

b- En déduire la valeur numérique de $E \ si \ b = 3 \ et \ a = 2$.

Exercice 2 :

1- Effectuer les calculs suivants :

$B = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{4 + \frac{1}{5}}}}$; $D = 5 - 6 \times \dfrac{\left(\frac{5}{9} - \frac{1}{3}\right)\left(3 - \frac{1}{2}\right)}{\frac{2}{3} - 4} + \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right)$;

2- Montrer que le nombre réel suivant est un entier : $q = \dfrac{1}{1 + \frac{a}{b+c}} + \dfrac{1}{1 + \frac{b}{c+a}} + \dfrac{1}{1 + \frac{c}{b+a}}$