TITRE DE LA LEÇON : CALCULS SUR LES RADICAUX : Racines $n^{-ièmes}$
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Algèbre
Niveau : Lycée - Classe : Seconde C

I- Racines carrées

1- Rappel : Propriétés des racines carrées a et b sont les réels positifs ; n un nombre entier relatif

- $\sqrt{a^2} = |a|$;$(\sqrt{a})^2 = a$;
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$; $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;
- $\sqrt{a^{2n}} = \sqrt{(a^n)^2} = a^n$;
  $\sqrt{a^{2n+1}} = \sqrt{(a^n)^2 \times a} = a^n\sqrt{a}$.

2-Formule de simplification d'une expression de la forme : $A = \sqrt{a \mp \sqrt{b}}$

On calcule $c^2 = a^2 - (\sqrt{b})^2$ avec $c > 0$.

Si **c** est un carré parfait, alors A est simplifiable **:** $A = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \mp \sqrt{\frac{a-c}{2}}$

II- Racines n-ièmes d'un nombre réel

1- Définition

On appelle racine **n-ièmes** d'un nombre réel a, le nombre réel r tel que : $r^n = a$.

On note : $\sqrt[n]{a}$, la racine **n-ièmes** de **a ;** on écrit : $r^n = a \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$;

où $\sqrt[n]{}$ est le radical d'indice n, **a** est le radicande et **n** un entier naturel tel que : $n \geq 2$.

Remarque

- Si n est pair et si $a > 0$, alors: $\sqrt[n]{a} > 0$;
- Si n est pair et si $a < 0$, alors: $\sqrt[n]{a}$ n'a pas de sens. Dons a n'admet pas de racines **n-ièmes** ;
- Si n est impair et si $a > 0$, alors: $\sqrt[n]{a} > 0$;
- Si n est impair et si $a < 0$, alors: $\sqrt[n]{a} < 0$. Donc : $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$.

2- Cas particuliers :

- **Si** $n = 3$, alors $\sqrt[3]{a}$, est la racine **cubique** de **a ;**
- **Si** $n = 4$, alors $\sqrt[4]{a}$, est la racine **quatrième** de **a**
- **Si** $n = 5$, alors $\sqrt[5]{a}$,est la racine **cinquième** de **a**

Exemples :

a) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$; 2 est la racine cubique de 8.

b) $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$; -2 est la racine cubique de -8.

c) $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$; 2 est la racine quatrième de 16.

d) $\sqrt[4]{-16}$: n'a pas de sens.

Remarque : Si$x < 0$, alors : $\sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{|x|}$

III-Propriétés : Soient a, b deux nombres réels tels que : $b \neq 0$ et m un entier relatif ; $n\ et\ p$ deux entiers naturels tels que : $n \geq 2$ et $p \geq 2$.

- $b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow a = b^n$;
- $\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a}$; $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}} = \boldsymbol{a}$ **;**
- $\sqrt[n]{\boldsymbol{ab}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \times \sqrt[n]{\boldsymbol{b}}$ **;**
- $\sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}} = \frac{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}}$ **;**
- $\sqrt[n]{\sqrt[p]{\boldsymbol{a}}} = \sqrt[np]{\boldsymbol{a}} = a^{\frac{1}{np}}$
- $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$
- $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{nm}}} = \sqrt[n]{(\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}})^{\boldsymbol{n}}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}$

Exercice 1 : Ecrire $\sqrt{128}$ sous la forme : $a\sqrt{b}$
Solution : Ecrivons $\sqrt{128}$ sous la forme : $a\sqrt{b}$
$128 = 2^7 = 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2$.
Donc $\sqrt{128} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2} = 2 \times 2 \times 2\sqrt{2}$;
$\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$.

Exercice 2 : Calculer : $A = \sqrt{18} - 2\sqrt{12} + 4\sqrt{8}$
Solution : calculons A
$A = \sqrt{3^2 \times 2} - 2\sqrt{2^2 \times 3} + 4\sqrt{2^2 \times 2}$;
$A = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 8\sqrt{2}$;
$A = (3 + 8)\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$;
$A = 11\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$.

Exercice 3 : Calculer : $B = \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$
Solution : Calculons B
$B = \sqrt{2} \times \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) - \sqrt{3} \times \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$;
$B = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \left(-\sqrt{3}\right) - \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \left(-\sqrt{3}\right)$;
$B = -2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$.

Exercice 4 :
1-Simplifier chacune des expressions suivantes :

$$\mathrm{P} = \frac{\sqrt[4]{9}\,.\,\sqrt[5]{81}\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{3}}}\right)^{18}}{\sqrt[3]{\sqrt{27}}} \ ; \quad \mathrm{T} = \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}.$$

$K = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ et $H = \sqrt{\left(2\sqrt{2} - 3\right)^2} + \sqrt{\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^2}$

2-En déduire l'écriture simplifiée du nombre réel :

$$X = \left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)\left(3 - 2\sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)\left(3 + 2\sqrt{2}\right) .$$