



TITRE DE LA LEÇON : ELEMENTS PARTICULIERS D'UN SOUS - ENSEMBLE BORNE DE \mathbb{R}

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Algèbre

Niveau : Lycée - Classe : Seconde C

Soient A un sous-ensemble non vide de \mathbb{R} , M et m des nombres réels.

1- Majorant et maximum

- M est un **majorant** de A , si et seulement si, pour tout : $x \in A$, $x \leq M$.
On dit que A est majoré par M ;
- **Le maximum** de A , est le plus grand élément de A ou le majorant de A appartenant à A .

Exemples : Dans $A = [0; 4]$: 4 est un majorant de A . Il est aussi maximum de A
Dans $B = [-1; 5[$: 5 est un majorant de B . Mais B n'a pas de maximum.

2- Minorant et minimum

- m est un **minorant** de A , si et seulement si, pour tout
 $x \in A$, $x \geq m$. On dit que A est minoré par m ;
- **Le minimum de A** , est le plus petit élément de A (ou le minorant de A) appartenant à A .

Exemples : Dans $A = [0; 4]$: 0 est un minorant de A . Il est aussi minimum de A

Dans $B =]-1; \sqrt{2}[$: -1 est un minorant de B . Mais B n'a pas de minimum.

Remarque :

- ✓ *Un ensemble qui est à la fois minoré (par m) et majoré (par M), est dit : borné : A est borné si et seulement si, pour tout $x \in A$, $m \leq x \leq M$*
- ✓ *Un sous-ensemble majoré (ou minoré) de \mathbb{R} , admet une infinité de majorants (ou de minorants)*
- ✓ *Un sous-ensemble majoré (ou minoré) de \mathbb{R} , n'admet pas nécessairement de maximum (ou de minimum)*
- ✓ *Le maximum ou le minimum d'un sous-ensemble de \mathbb{R} , lorsqu'il existe, est unique.*
- ✓ *Les ensembles $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ne sont ni majorés, ni minorés. \mathbb{N} est minoré par : $0, -1, -\pi, \dots$, mais n'est pas majoré.*

3- Supremum et infimum

- Le supremum (ou la borne supérieure) d'un ensemble, noté : Sup , est le plus petit des majorants de cet ensemble
- L'infimum (ou la borne inférieure) d'un ensemble, noté : inf , est le plus grand des minorants de cet ensemble.

**Exercice 1**

Déterminer, si possible, les éléments particuliers (minorant, majorant, minimum, maximum) de chacun des sous-ensembles de \mathbb{R} suivants :

$$F =]-3;7[; A = [-1;9] ; D =]0;3] ; E = [2;10[; H =]-\infty;-4] ; B = [2;+\infty[. T =]-\infty;6[; \\ K =]4;+\infty[; G =]-\infty;+\infty[.$$

Exercice 2

Déterminer, si possible, les éléments particuliers (minorant, majorant, minimum, maximum) de chacun des sous-ensembles de \mathbb{R} suivants :

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R} ; x = \frac{3n + 1}{n+2} ; n \in \mathbb{N} \right\} ;$$