**TITRE DE LA LEÇON : EQUATIONS ET INEQUATIONS DU PREMIER DEGRE DANS $\mathbb{R}$**

**Discipline : Mathématiques**

**Sous-discipline : Algèbre**

**Niveau : Lycée - Classe : Seconde C**

**Systèmes auxiliaires**

**Leçon 4 ; page 26**

**1. Rappel sur la résolution des systèmes de deux équations à deux inconnues**

Soit le système : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

(Avec a, b, c, a', b' et c' des réels)

Le déterminant du système est :

$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

Si $\Delta \neq 0$, le système a une solution unique $(x; y)$ donnée par les formules de Cramer :

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{bmatrix} c & b \\ c' & b' \end{bmatrix}}{\Delta}$ ; $y = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta}$ $S = \{x; y\}$

Si $\Delta = 0$ le système n'a pas de solution ou est indéterminé

$\Delta_x = \begin{bmatrix} c & b \\ c' & b' \end{bmatrix}$ ; $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$

$- si\ \Delta_x \neq 0;\ \Delta_y \neq 0$ Alors $S = \emptyset$

$- si\ \Delta_x = 0;\ \Delta_y = 0$ Alors : $S = \mathbb{R}^2$

**2. Résolution des systèmes auxiliaires**

La méthode implique l'utilisation d'un changement d'inconnues afin de faciliter la résolution.

**Exercices d'application**

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes ci- après :

1)$\begin{cases} 2x^2 - y = 1 \\ x^2 + y = 0 \end{cases}$ 2)$\begin{cases} \frac{2}{x-2} + \frac{3}{y+1} = -1 \\ \frac{1}{x-2} - \frac{1}{y+1} = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2\sqrt{3} + y^2 = \sqrt{3} \\ 3x^2 + y^2\sqrt{3} = 3 \end{cases}$ 4)$\begin{cases} 3\sqrt{x} + 15\sqrt{y} = 1 \\ 2\sqrt{x} + 10\sqrt{y} = -1 \end{cases}$

5)$\begin{cases} 5x^2 - 2y^2 = 14 \\ -3x^2 + 5y^2 = 3 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2(x-3) + 3(y-1) = 2 \\ 3(x-3) + 4(y-1) = -2 \end{cases}$

**Solutions**

1) $\begin{cases} 2x^2 - y = 1 \\ x^2 + y = 0 \end{cases}$ Posons : $X = x^2\ et\ Y = y^2$ on a :

$\begin{cases}2X-Y=1\\X+Y=0\end{cases}$ $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{vmatrix}=2+1=3$

$\Delta_X=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}=1 \Rightarrow X=\dfrac{1}{3}$

$\Delta_Y=\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}=-1 \Rightarrow Y=-\dfrac{1}{3}$

$x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\,; y=-\frac{1}{3}$

$S=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{1}{3}\right);\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{1}{3}\right)\right\}$

2) $\begin{cases}\frac{2}{x-2}+\frac{3}{y+1}=-1\\\frac{1}{x-2}-\frac{1}{y+1}=2\end{cases}$ $Posons$ $\begin{cases}X=\frac{1}{x-2}\\Y=\frac{1}{y+1}\end{cases}$ On a :

$\begin{cases}2X+3=-1\\X-Y=2\end{cases}$ $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & -1\end{vmatrix}=-2-3=-5$

$\Delta_X=\begin{bmatrix}-1 & 3\\2 & -1\end{bmatrix}=1-6=-5 \Rightarrow X=\dfrac{-5}{-5}=1$

$\Delta_Y=\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{vmatrix}=4+1=5 \Rightarrow Y=-\dfrac{5}{5}=-1$

Pour $X=1 \Rightarrow \frac{1}{x-2}=1 \Rightarrow x-2=1 \Rightarrow x=3$

Pour $Y=-1 \Rightarrow \frac{1}{y+1}=-1 \Rightarrow y=-2$

$$S=\{(3;-2)\}$$

3) $\begin{cases}x^2\sqrt{3}+y^2=\sqrt{3}\\3x^2+y^2\sqrt{3}=3\end{cases}$

Posons $X=x^2$ $et$ $Y=y^2$

$\begin{cases}X\sqrt{3}+Y=\sqrt{3}\\3X+Y\sqrt{3}=3\end{cases}$

$\Delta=\begin{vmatrix}\sqrt{3} & 1\\3 & \sqrt{3}\end{vmatrix}=\left(\sqrt{3}\right)^2-3=3-3=0$

$\Delta_X=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\\3 & \sqrt{3}\end{bmatrix}=0$ $\Delta_Y=\begin{vmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{3}\\3 & 3\end{vmatrix}=3\sqrt{3}-3\sqrt{3}=0$

$$S=\mathbb{R}$$

4) $\begin{cases}3\sqrt{x}+15\sqrt{y}=1\\2\sqrt{x}+10\sqrt{y}=-1\end{cases}$ Posons $X=\sqrt{x}$ $et$ $Y=\sqrt{y}$ on a

$\begin{cases}3X+15Y=1\\2X+10Y=-1\end{cases}$ $\Delta=\begin{vmatrix}3 & 15\\2 & 10\end{vmatrix}=30-30=0$

$\Delta_X=\begin{bmatrix}1 & 15\\-1 & 10\end{bmatrix}=25\,;$ $\Delta_Y=\begin{vmatrix}3 & 1\\2 & -1\end{vmatrix}=-3-2=-5$

$$S=\phi$$