TITRE DE LA LEÇON : LIGNES DE NIVEAU
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Géométrie
Niveau : Lycée - Classe : Seconde C

I- Définition d'une ligne de niveau

Soit l'application: $\begin{array}{l} f\ : P \longrightarrow \mathbb{R} \\ M \mapsto f(M) \end{array}$ appelée : Fonction scalaire de Leibniz ; M désigne un point du plan P.
On appelle ligne de niveau k de f, l'ensemble $(\mathcal{L}_k)$des points M du plan tels que : $f(M) = k; k \in \mathbb{R}$

II- Détermination des lignes de niveau ou ensembles de points ou lieux géométriques

2-1- Ensembles de points M (ou lieu géométrique) tels que : $\vec{U}.\overrightarrow{AM} = k;\ k \in \mathbb{R}$
Soit B un point du plan tel que : $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$, ona $\vec{U}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = k$.
Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB), on a :
Procédé1 : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \overline{AB} \times \overline{AH} = k \Leftrightarrow \overline{AH} = \frac{k}{AB}$

Procédé2 : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = k$. A, B et H étant alignés, alors $\overrightarrow{AH} = \lambda\overrightarrow{AB}; \lambda \in \mathbb{R}$.
Alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = k \Leftrightarrow \lambda AB^2 = k \Leftrightarrow \lambda = \frac{k}{AB^2}. \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{k}{AB^2}\overrightarrow{AB}$

Ainsi, l'ensemble $(\mathcal{L}_k)$des points M du plan tels que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = k$, est une droite perpendiculaire à la droite (AB), passant par H.

2-2- Ensembles de points M (ou lieu géométrique) tels que : $MA^2 + MB^2 = k;\ k \in \mathbb{R}$
Soit I milieu de $[AB]$ tels que : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ et $IA = IB = \frac{AB}{2}$

$MA^2 + MB^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + IA^2 + IB^2$
$= 2MI^2 + 2IA^2 = 2MI^2 + 2\left(\frac{AB}{2}\right)^2$.Alors : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} - \frac{AB^2}{4}$

En posant $\frac{k}{2} - \frac{AB^2}{4} = \lambda$, on a $MI^2 = \lambda$
Conclusion :

- Si $\lambda > 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est un cercle de centre I et de rayon de longueur :$\sqrt{\lambda}$: $(\mathcal{L}_k) = C(I; \sqrt{\lambda})$;
- Si $\lambda = 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est un cercle point, de centre I ou le singleton I ;
- Si $\lambda < 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est l'ensemble vide : $(\mathcal{L}_k) = \emptyset$

2-3- Ensembles de points M (ou lieu géométrique) tels que : $MA^2 - MB^2 = k;\ k \in \mathbb{R}$

Soit I milieu de $[AB]$ tels que : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ et $IA = IB = \frac{AB}{2}$

$$MA^2 - MB^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}\right) = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}$$

.Alors : $MA^2 - MB^2 = k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = k.$

Soit H, le projeté orthogonal de M sur (AB), alors $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = 2\overline{AB} \times \overline{IH} = k \Leftrightarrow \overline{IH} = \frac{k}{2\overline{AB}}$

Ainsi, l'ensemble $(\mathcal{L}_k)$des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = k$, est une droite perpendiculaire à la droite (AB), passant par H, avec I milieu de $[AB]$.

2-4- Ensembles de points M tels que : $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k; k \in \mathbb{R}$; $\alpha \neq 1, \beta \neq 1, \alpha + \beta \neq 0$

Soit G barycentre des points pondérés $(A;\alpha), (B;\beta)$ tel que : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ et $IA = IB = \frac{AB}{2}$

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = \alpha\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \beta\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2$$
$$= (\alpha + \beta)MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}\right) + \alpha GA^2 + \beta GB^2$$

Alors : $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = (\alpha + \beta)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 = k \Leftrightarrow MG^2 = \frac{k - \alpha GA^2 - \beta GB^2}{\alpha + \beta}$

En posant $\frac{k - \alpha GA^2 - \beta GB^2}{\alpha + \beta} = \lambda$, on a $MG^2 = \lambda$

Conclusion :

- Si $\lambda > 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est un cercle de centre G et de rayon de longueur :$\sqrt{\lambda}$: $(\mathcal{L}_k) = C\left(G; \sqrt{\lambda}\right)$;
- Si $\lambda = 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est un cercle point, de centre G ou le singleton G ;
- Si $\lambda < 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est l'ensemble vide : $(\mathcal{L}_k) = \emptyset$

2-5- Ensembles de points M (ou lieu géométrique) tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k;\ k \in \mathbb{R}$

Soit I milieu de $[AB]$ tels que : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ et $IA = IB = \frac{AB}{2}$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = MI^2 + \overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

Alors : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$

En posant $k + \frac{AB^2}{4} = \lambda$, on a $MI^2 = \lambda$

Conclusion :

- Si $\lambda > 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est un cercle de centre I et de rayon de longueur :$\sqrt{\lambda}$: $(\mathcal{L}_k) = C\left(I; \sqrt{\lambda}\right)$;
- Si $\lambda > 0$ et $k = 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est le cercle de diamètre $[AB]$.
- Si $\lambda = 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est un cercle point, de centre I ou le singleton I ;
- Si $\lambda < 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est l'ensemble vide : $(\mathcal{L}_k) = \emptyset$

2-6- Ensembles de points M (ou lieu géométrique) tels que : $\frac{\boldsymbol{MA}}{\boldsymbol{MB}} = \boldsymbol{k}$; $k \in \mathbb{R}$

- Si $k < 0$, alors $(\mathcal{L}_k)$ est l'ensemble vide : $(\mathcal{L}_k) = \emptyset$;
- Si $k = 0$, alors $MA = 0 \Leftrightarrow M = A$. Donc $(\mathcal{L}_k)$ est le singleton A : $(\mathcal{L}_k) = \{A\}$
- Si $k = 1$, alors $MA = MB \Leftrightarrow M \in méd[AB]$. Donc $(\mathcal{L}_k)$ est la médiatrice de$[AB]$.
- Si $k > 0$,alors $\frac{\boldsymbol{MA}}{\boldsymbol{MB}} = \boldsymbol{k} \Leftrightarrow MA = kMB \Leftrightarrow MA^2 - k^2MB^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - k^2\overrightarrow{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right) = 0$$

Soient $G_1 = bary\{(A;1),(B;k)\}$ et $G_2 = bary\{(A;1),(B;-k)\}$, on a

$$\left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1A} + k\overrightarrow{MG_1} + k\overrightarrow{G_1B}\right).\left(\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2A} - k\overrightarrow{MG_2} - k\overrightarrow{G_2B}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1+k)(1-k)\overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2} = 0$$

Conclusion : Donc $(\mathcal{L}_k)$ est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

Exercice 1

1- Soient B et C deux points distincts du plan tels que BC = 6cm. On désigne par O, le milieu de $[\mathrm{BC}]$.
   a) Démontrer que, pour tout point M du plan, $\mathrm{MB}^2 + \mathrm{MC}^2 = 2\mathrm{MO}^2 + \frac{\mathrm{BC}^2}{2}$.
   b) Déterminer, puis construire l'ensemble (C) , des points M du plan tels que :
   $\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = 36$.

2- On désigne par (C), le cercle de diamètre $[\mathrm{BC}]$ et de centre O. .
   a) Place le point A de (C) tel que : $AB = BO$, puis donner la nature du triangle ABC .
   b) En appliquant le théorème de sinus, déterminer la mesure, en radians de l'angle $\hat{C}$. (1pt)
   c) En déduire une mesure, en radians, de l'angle $\hat{B}$.
   d) Calculer, alors, l'aire du triangle ABC

Exercice 2 :

I, J et K sont trois points non alignés du plan.

1- Construire le point A barycentre des pondérés $(I;3),(J;1)$, puis le point B barycentre de $(K;2),(J;-1)$.

2- a) Montrer que : $3\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ} = 4\overrightarrow{MA}$ est que $2\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MB}$.
   b) Déterminer, puis construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$\left\|2\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MJ}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}\right\|$.