# TITRE DE LA LEÇON : PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS DU PLAN

**Discipline : Mathématiques**

**Sous-discipline : Géométrie**

**Niveau : Lycée - Classe : Seconde C**

## I- Produit scalaire de deux vecteurs : Définition et propriétés

**1- Définition :** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, non nuls du plan ou de l'espace.
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ , le nombre réel, noté : $u\,.\vec{v}$ défini par :
$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u},\vec{v})$ ; où $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$ est la norme du vecteur $\vec{u}$.

$\vec{u}.\vec{v}$ se lit : $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$

**Remarque :**

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors : $\vec{0}.\vec{v} = 0$, $\vec{u}.\vec{0} = 0$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, alors $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \cos 0 = 1$ et $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| > 0$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens opposés, alors $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \cos\pi = -1$ et $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| < 0$
- Si $\vec{u} = \vec{v}$, alors $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2$ ; $\vec{u}^2$ est appelé : Carré scalaire de $\vec{u}$

**2- Propriétés :**

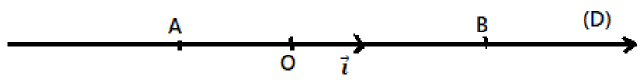
- $\vec{u}\,.\vec{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou encore $\vec{u} \perp \vec{v}$ ;
- $\vec{u}\,.\vec{v} = \vec{v}\,.\vec{u}$; $|\vec{u}\,.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- $\vec{u}\,.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\,.\vec{v} + \vec{u}\,.\vec{w}$; $\vec{u}\,.(k\vec{v}) = k(\vec{u}\,.\vec{v})\,, avec\ k \in \mathbb{R}^*$ ;
- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\,.\vec{v} + \vec{v}^2 \Leftrightarrow$
  $\vec{u}\,.\vec{v} = \frac{1}{2}[(\|\vec{u}+\vec{v}\|)^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$ : Règle du parallélogramme
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\,.\vec{v} + \vec{v}^2 \Leftrightarrow \vec{u}\,.\vec{v} = \frac{1}{2}[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}-\vec{v}\|)^2]$

  Si A, B et C sont trois non alignés tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, alors :
  $\overrightarrow{AC}\,.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(AC^2 + AB^2 - BC^2)$
- $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

## II-Produit scalaire de deux vecteurs à l'aide d'une projection orthogonale

**1- Définition de la mesure algébrique**

Soient (D), une droite orientée par un de ses vecteurs directeurs unitaires ; A et B deux points de (D)



On appelle mesure algébrique du bipoint $(A, B)$ ou du vecteur $\overrightarrow{AB}$ relativement à $\vec{\boldsymbol{\imath}}$, l'unique nombre réel, noté : $\overline{AB}$, tel que : $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overline{AB}\ \vec{\boldsymbol{\imath}}$.

**2- Propriétés de la mesure algébrique**

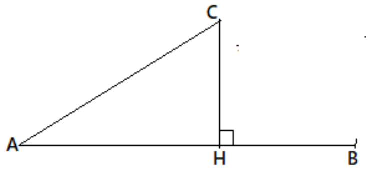
- $\overline{AB} = -\overline{BA}$ ; $|\overline{AB}| = AB$; Si $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = \lambda\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, $\boldsymbol{alors}$ $\overline{AC} = \lambda\overline{AB}$ ; $\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$
- Si A, B et C sont alignés, alors: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$: Relation de Chasles.
- Si $C \in [AB]$, alors $AC + CB = AB$

**3-Définition (Interprétation géométrique du produit scalaire)**

Etant donnés trois points non alignés

A,B et C, tels que $A \neq B$ , alors :

$\overrightarrow{\mathbf{AB}} . \overrightarrow{\mathbf{AC}} = \overline{\mathbf{AB}} \times \overline{\mathbf{AH}}$



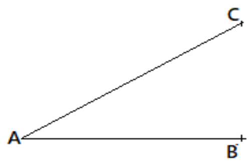

où H est le projeté orthogonal de C sur (AB)

**III-Produit scalaire à l'aide de la relation de Chasles .**

Etant donnés quatre points A, B, C et D

du plan ou de l'espace , alors :

$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} . (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{DC}$




**IV-Produit scalaire dans une base orthonormée :Expression analytique du produit scalaire**

– Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:$\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y'$

Où $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\,\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$.

La norme de $\vec{u}$ est donnée par : $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

– Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ :$\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y' + zz'$

Où $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath} + \vec{k}\,z'$ .

La norme de $\vec{u}$ est : $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

NB : Si $\vec{u} \perp \vec{v}$ , alors : $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow x.x' + y.y' = 0$ ou $x.x' + y.y' + zz' = 0$

**Exercice1**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$, on donne les vecteurs
$\vec{u} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -3\vec{\imath} + \alpha\vec{\jmath}$ ; $\alpha \in \mathbb{R}$.
1-Déterminer le réel $\alpha$ pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.
2- Dans la suite, on pose : $\alpha = 2$.

a) Montrer que $\left(\vec{u}; \vec{v}\right)$ est une base du plan vectoriel.
b) Calculer le produit scalaire : $\vec{u} . \vec{v}$ .

c) En déduire la valeur numérique du cosinus de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.
d) En utilisant les résultats précédents, calculer la norme :$\|3\vec{u} - 2\vec{v}\|$.
e) On pose : $\vec{a} = -3\vec{i}$ et $\alpha = 2$ . Ecrire le vecteur : $\vec{w} = \frac{1}{3}\vec{u} - \frac{2}{5}\vec{v} + \frac{4}{3}\vec{a}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$.

**Exercice 2**

On considère un carré ABCD de côté $a = 4cm$ et I le milieu du côte $[BC]$.

On pose mes$\left(I\hat{A}C\right) = \theta$.

1-Faire la figure.

2-Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CB}$

3-En appliquant le théorème de Pythagore, calculer les distances AC et AI.

4-En déduire une mesure $\theta$, en degrés de l'angle $I\hat{A}C$.

(On pourra utiliser le produit scalaire : $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}$)