TITRE DE LA LEÇON : BARYCENTRES DE DEUX POINTS PONDERES

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Géométrie

Niveau : Lycée - Classe : Seconde C

1- Définition

Soit $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ un système de deux points pondérés.
On appelle barycentre de deux points pondérés : $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ l'unique point G du plan tel que :
$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ et $\alpha+\beta \neq 0$.
On note : $G = bar\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$

2- Propriété caractéristique

Soit $G = bar\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$, on a

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}.$$

❖ **Position de G sur la droite (AB)**

- Si α et β ont le même signe, alors G est un point de $[AB]$: $G \in [AB]$;
- Si α et β sont de signes opposés, alors G est extérieur à $[AB]$: $G \notin [AB]$;
- Si $\alpha = 0$, alors $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}$. Donc $G = B$;
- Si $\beta = 0$, alors $\overrightarrow{AG} = \vec{0}$. Donc $G = A$;
- $\alpha = \beta \neq 0$, alors $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Donc G est le milieu de $[AB]$.

Remarque : Soit $G = bar\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$. $Si\ \alpha = \beta \neq 0$, alors G est l'isobarycentre de deux points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$. L'isobarycentre de deux points pondérés A et B est donc le milieu de ces de $[AB]$.

3- Homogénéité du barycentre de deux points

Le barycentre de deux points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie (ou on divise) tous ses coefficients par un même nombre réel non nul :Soit $G = bar\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$, alors pour tout réel non nul k, $G = bar\{(A;k\alpha),(B;k\beta)\}$.

4- Réduction des sommes

Soit $G = bar\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ tel que: $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
Pour tout point M du plan, $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \alpha\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{MG} + \beta\,\overrightarrow{GB}$
Donc $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$
Exemple : Soit $G = bar\{(A;3),(B;2)\}$. Montrons que : $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 5\,\overrightarrow{MG}$

$G = bar\{(A;3),(B;2)\}$, alors $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

On a: $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right) + 2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)$

$= 5\,\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = 5\,\overrightarrow{MG} + \vec{0}$. D'où $3\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} = 5\,\overrightarrow{MG}$.

5- Coordonnées du barycentre de deux points dans le repère$(\boldsymbol{O};\vec{\boldsymbol{\imath}},\vec{\boldsymbol{\jmath}})$

$G = bar\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$, alors : $\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta} \\ y_G = \frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta} \end{cases}$

6- Construction du barycentre de deux points

On se propose de construire : $G = bar\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$.

a) Méthode du parallélogramme

- On place deux points A et B dans la plan, puis un point O du plan, non situé sur (AB) ;
- on construit les points A', B' et M' tels que : $\overrightarrow{OA'} = \alpha\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'} = \beta\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$;
- la droite (OM) coupe (AB) au point G.

b) Utilisation du théorème de Thalès

- On place deux points A et B dans la plan ;
- on construit la demi-droite $[Ax)$ ou la droite (Ax) distincte de (AB), orientée par un vecteur unitaire $\vec{\imath}$;
- on place les points G'(β)et B'($\alpha + \beta$) sur $[Ax)$;
- la parallèle à (BB') passant par G', coupe (AB) en G.

c) Méthode par homothétie

- On place deux points A et B dans la plan ;
- on trace deux droites parallèles (D) et (D') passant respectivement par A et B, orientée par le même vecteur unitaire $\vec{\imath}$;
- on construit un point M sur (D) et un point M' sur (D') tels que : $\overline{AM} = \beta,\ \overline{BM'} = -\alpha$;
- la droite (MM') coupe (AB) au point G.

Exercice 1 :

1-A, B et G sont trois points du plan tels que : $2\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{AG}$. Montre que G est barycentre des points A et B affectés des coefficients α et β que l'on déterminera.
2-On pose $AB = 4cm$. En utilisant la méthode de Thalès, construire le point G.
3- On pose : $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{HG}$. Détermine x pour que H soit l'isobarycentre des points A et B.

Exercice 2 :

Soit G le barycentre des points pondérés (A, m^2) et $(B, 4)$.
1-Pour quelles valeurs de m : a)Le point G existe ;b)Le point G est isobarycentre des points A et B.
2-Vérifier si le point G est à l'extérieur ou à l'intérieur de $[AB]$.

Exercice 3 :

A et B sont deux points du plan.
1-Démontrer qu'il existe un unique point G du plan tel que : $5\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
2-Exprimer $\overrightarrow{GA}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Que peut-on dire des points A, B et G ?
3-Le plan est rapporté au repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Démontrer que $\overrightarrow{OG}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. Calculer les coordonnées du point G sachant que : $A(1;2)$ et $B(-2\,;-3)$.

Exercice 4 :

ABC est un triangle quelconque. Soit I milieu de $[BC]$.
Déterminer l'ensemble (D) des points M du plan tels que : $\|\, 3\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = \|\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.