TITRE DE LA LEÇON : EQUATIONS CARTESIENNES ET PARAMETRIQUES DE CERCLES DU PLAN

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Géométrie

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

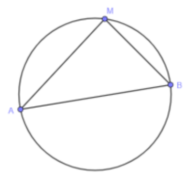
1- Equation du cercle défini par son centre et son rayon :

Soient I un point du plan, R un nombre réel strictement positif, (C) le cercle de centre I et de rayon de longueur R.

Pour tout point $M(x;y)$ du plan, on a : $M \in (C) \Leftrightarrow IM = R \Leftrightarrow IM^2 = R^2$. On obtient l'équation cartésienne du cercle (C), de centre $I(a;b)$ et de rayon de longueur R : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

2- Equation du cercle défini par un de ses diamètres :

Soient A et B deux points du plan, (C) le cercle de diamètre $[AB]$.



Pour tout point $M(x;y)$ du plan, on a : $M \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

3- Familles de cercles

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$; a, b, c, R sont les nombres réels tels que : $R^2 = a^2 + b^2 - c$

L'ensemble (C) des points $M(x;y)$ du plan, tels que : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ est soit :

- l'ensemble vide, si $R^2 < 0$;
- un singleton ou un cercle point, $R^2 = 0$;
- un cercle, si $R^2 > 0$

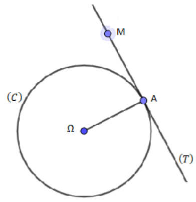
4- Equation du cercle circonscrit à un triangle :

Soient A ,B, C trois points du plan.

Pour déterminer l'équation du cercle (C), circonscrit au triangle ABC, on résout le système suivants à trois équations à trois inconnues a, b et c : $\begin{cases} {x_A}^2 + {y_A}^2 - 2ax_A - 2bx_A + c = 0 \\ {x_B}^2 + {y_B}^2 - 2ax_B - 2bx_B + c = 0 \\ {x_C}^2 + {y_C}^2 - 2ax_C - 2bx_C + c = 0 \end{cases}$

5- Equation de la tangente à un cercle :

Soient A un point du cercle (C), de centre $\Omega(a;b)$ et rayon $[\Omega\, A]$ et (T), la tangente à (C) en A.



Pour tout point $M(x;y)$ du plan, on a : $M \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

6- **Représentations paramétriques d'un cercle**

Un cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon de longueur R, admet une représentation paramétrique de la forme : $\begin{cases} x = R\cos\theta + a \\ y = R\sin\theta + b \end{cases}$; $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 :

Déterminer l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan, tels que :

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

Solution

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$(x-2)^2 - 4 + (x+3)^2 - 9 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (x+3)^2 = 16$.

Donc l'ensemble des points $M(x;y)$ est un cercle de centre $\Omega(2;-3)$ et de rayon de longueur 4cm.

Exercice 2 :

Déterminer l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan, tels que :

$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2m(x - y + 1) = 0$, où m est un paramètre réel.

Exercice 3 :

Dans le plan est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne les $A(-1;6)$, $B(3;2)$ et $C(-2;1)$

Déterminer l'équation du cercle :

a- de diamètre$[AB]$;

b- de centre B et de rayon$[AC]$.

c- circonscrit au triangle ABC. En déduire ses éléments caractéristiques.