**TITRE DE LA LEÇON : Expressions algébriques**
**Discipline : Mathématiques**
**Sous-discipline : Algèbre**
**Niveau : Lycée - Classe : Seconde C**

## I- Calculs sur les polynômes

### 1- Définition :

Une fonction P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est appelée fonction polynôme ou polynôme, s'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que, pour tout réel $x$ : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.
$a_0, a_1, \dots, a_n$ sont les coefficient de P.
Le plus grand entier naturel $n$ tel que : $a_n \neq 0$ ($a_n$: coefficient dominant), est le degré de P. On écrit $d^{\circ}P = n$ ou $degP = n$. **NB :** $deg(P)^{\alpha} = \alpha \times degP$ ; $deg\lambda P = degP \ avec \ \lambda \in \mathbb{R}$.

### 2- Propriétés

Soient $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ et $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ deux polynômes.

- f et g sont égaux si et seulement s'ils ont le même degré et les coefficients des termes de même degré sont égaux : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow n = m \ et \ a_n = b_m, \dots, \ a_1 = b_1, \ a_0 = b_0$
- Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls :
  $f(x) = 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$
- Le produit de deux polynômes f et g, est un polynôme : $f.g$. Si f et g sont non nuls, alors :
  $$\deg(fg) = degf + degg$$
- La somme de deux polynômes f et g, est un polynôme. Si la somme n'est pas le polynôme nul, alors son degré est inférieur ou égal au plus grand des deux degrés $n \ et \ m$:
  1er cas : Si $n \neq m$, alors $\deg(f+g) = \begin{cases} m \ \ si \ m > n \\ n \ si \ n > m \end{cases}$
  2ème cas : Si $n = m$ et $a_n + b_m = 0$ , alors $\deg(f+g) < n$
  3ème cas : Si $n = m$ et $a_n + b_m \neq 0$ , alors $\deg(f+g) = n$

### 3- Racines et factorisation des polynômes

**Définition1 :** On appelle racine ou zéro d'un polynôme $P(x)$, tout réel $\alpha$ tel que : $P(\alpha) = 0$.
Pour déterminer les racines de P, on résout l'équation $P(x) = 0$.
**Théorème D'Alembert** Tout polynôme de degré $n$, admet au plus $n$ racines. (racines$\leq n$)
**Définition2 :** Un polynôme f est factorisable ( ou divisible) par un polynôme g si, et seulement si, il existe un polynôme q tel que, pour tout réel $x$, $f(x) = g(x) \times q(x)$.
q est le quotient de f par g tel que : $\deg f = degg + degq$

**Théorème :** Le réel $\alpha$ est une racine du polynôme f si, et seulement si, $f(x)$ est factorisable (ou divisible) par $x - \alpha$ .C'est-à-dire, $\alpha$ est racine de f ( $f(\alpha) = 0$) si, et seulement si, il existe un polynôme q tel que, pour tout réel $x$, $f(x) = (x - \alpha) \times q(x)$; $\deg f = 1 + degq \Leftrightarrow \deg q = degf - 1$.

Si les $p$ réels $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \dots,\ \alpha_p$ sont les racines distinctes deux à deux d'un polynôme non nul f, alors il existe un polynôme g tel que, pour tout réel $x$ : $f(x) = (x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_p)\times g(x)$ tel que :

$$\deg g = degf - p$$

**NB :** Pour déterminer le quotient q, on peut utiliser les méthodes suivantes : Schéma d'Horner, division euclidienne, coefficients indéterminés(identification des coefficients) , utilisation des identités remarquables(incluant le triangle de Pascal, le binôme de Newton).

**Identités remarquables :**

- ✓ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- ✓ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- ✓ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- ✓ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- ✓ $a^3 + b^3 = (a-b)(a^2 - ab + b^2)$

D'une manière générale :

$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^{n-p}.b^p$ ou $(a-b)^n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p\, a^{n-p}.b^p$ : Formule du binôme de Newton.

Les coefficients $C_n^p$ sont déterminés en utilisant le triangle de Pascal.

$a^n - b^n = (a-b)\sum_{p=1}^{n} a^{n-p}b^{p-1}$ ; $a^n + b^n = (a+b)\sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1}a^{n-p}b^{p-1}$

**II- Fractions rationnelles**

**1- Définition :** Soient f et g deux fonctions polynômes.

La fonction quotient h, telle que : $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ est appelée fonction rationnelle.

Le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ est appelé : fraction rationnelle. La fonction h est définie lorsque $g(x) \neq 0$

**2- Polynômes réciproques de degré n**

Un polynôme P, est un polynôme réciproque de degré n, lorsque pour tout réel non nul $x$, on a

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n}\, P(x)$$

**Exercice 1 :**

1) On donne les polynômes : $Q(x) = (x^2-1)^5$ ;
$P(x) = (x^3 + x + 1)(-5x^7 + 3x^2 - 4)$ ; $R(x) = (x^3 - 2x^2 + 1)^n\,(x^{2n} - 1)$ ; $n \in \mathbb{N}^*$

Sans effectuer les calculs, déterminer le degré de chacun des polynômes suivants :
$P$; $Q$ ; $P + Q$ ; $R$ ; $R \times P$ et $R + Q$ .

2) Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel m, le degré du polynôme :

$$f(x) = (2m + 1)\, x\,[(m - 2)\, x + m] + 1 + m.$$

**Exercice 2 :**

On considère les polynômes $P$ et $K$ définis par : $P(x) = x^3 + x^2 + 4$ et $K(x) = 3x^2 = x + 7$

1) Déterminer le degré des polynômes S et t tels que : $S(x) = p(x) + k(x)$ et $t(x) = K(x) \times p(x)$
2) Calculer la somme $S(x) = p(x) + k(x)$ et le produit $t(x) = K(x) \times p(x)$.
3) Factoriser l'expression $A(x) = (x^2 - x + 1)^2 - (x + 3)^2$.

**Exercice 3**

On considère le polynôme $p(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$

1) Calculer $p(-1)$. Que peut-on en déduire de $x = -1$.
2) Déterminer les réels a et b pour que $p(x) = (x^2 - 3x + 2)(ax + b)$
3) On pose $a = -1$ et $b = 3$. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $p(x) = 0$ et $p(x) \leq 0$.

**Exercice4** :

a) Déterminer les nombres réels $a, b$ et $c$, pour que le polynôme :
$P(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 - 7x + c$ soit divisible par le polynôme: $x^3 + 3x^2 - x - 3$
b) Montrer que le polynôme q(x) = $Q(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ est divisible par
$x(x+1)(2x+1)$.