TITRE DE LA LEÇON : Inéquations du premier degré dans IR
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Algèbre
Niveau : Lycée - Classe : Seconde C

I-Inéquations liant deux polynômes et deux fractions rationnelles

1- Inéquations liant deux polynômes :

Pour résoudre une inéquation du type : $f(x) \geq g(x)$ où $f(x)$ et $g(x)$ sont des polynômes, on peut procéder comme suit :

- Se ramener à une inéquation du type $P(x) \geq 0$ où $P(x) = f(x) - g(x)$;
- Factoriser $P(x)$ si possible ;
- Déterminer les racines du polynôme P ;
- Etudier le signe de P dans un tableau de signes.

2- Inéquations liant deux fractions rationnelles :

Pour résoudre une inéquation du type : $f(x) \geq g(x)$) où $f(x)$ et $g(x)$ sont des fractions rationnelles, on peut procéder comme suit:

- Déterminer l'ensemble de définition (déterminer les contraintes sur l'inconnue) ;
- Réduire $f(x) - g(x)$ au même dénominateur en se ramenant à l'inéquation de la forme : $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$;
- Etudier, à l'aide d'un tableau, le signe de la fraction rationnelle :$\frac{A(x)}{B(x)}$.

3- Inéquations dans $\mathbb{R}$ à une inconnue du 1er degré avec valeur absolue

- Pour résoudre une inéquation du type :

$|f(x)| \leq |g(x)|$; $|f(x)| \geq |g(x)|$; $|f(x)| \leq g(x)$; $g(x) \geq 0$; $|f(x)| \geq g(x)$; $g(x) \geq 0$,
-on peut élever les deux membres de l'inéquation au carré ;
- on pose $P(x) = (f(x))^2 - (g(x))^2$ et on factorise $P(x)$;
- on étudie le signe du polynôme P, à l'aide d'un tableau de signes ;
-on donne ensuite l'ensemble de solutions de l'inéquation selon le type donné :$P(x) \leq 0$ *ou* $P(x) \geq 0$ *ou* $P(x) >$ *ou* $P(x) < 0$.

- Pour résoudre une inéquation du type : $|ax + b| < c$; (c: réel positif) :

on écrit $|ax + b| < c \Leftrightarrow -c < ax + b < c$ et on trouve un encadrement de x.

- Pour résoudre une inéquation du type : $|ax + b| > c$; (c: réel positif) :

on écrit $|ax + b| > c \Leftrightarrow ax + b > c$ ou $ax + b < -c$ et on résout les deux inéquations obtenues.
L'ensemble de solutions de l'équation : $|ax + \mathrm{b}| > \mathrm{c}$ est la réunion des ensembles de solutions trouvés dans les deux cas.

Exercice :

Résoudre dans IR chacune des inéquations suivantes:

$\frac{2x+1}{3}+\frac{5x-1}{6}\leq\frac{4x-3}{2}$; $\frac{x}{2}-3\leq\frac{x}{3}-4$; $\frac{x-1}{x-2}<4$; $\frac{x}{x+2}-2<\frac{4-x}{x}$; $\frac{x+2}{2x+5}\geq\frac{2x+5}{x+2}$;

$\frac{x}{2x^2-1}\leq\frac{2}{x-1}$; $\frac{(3-2x)^3(x+5)}{(7x-1)(3x+4)^2}\geq 0$; $\frac{x\sqrt{2}-1}{x+3}\leq -2$; $(x+3)^2>9(2x-1)^2$;

$x^2-3x<(4x+9)(x-3)$; $\frac{3x-1}{x^2-1}\geq\frac{2}{x+1}$; $\frac{x}{x^2-1}\leq\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$; $\frac{(2x-1)^2}{x^2-1}\leq\frac{(x-3)^2}{x^2-1}$;

$|x+2|\geq 3x-4$; $|x-2|<5$; $\frac{|2x-5|}{|x-4|}<1$; $|6-3x|-9>0$; $|2x-1|+|2-3x|>2$;

$\begin{cases} x^2>4 \\ x+1>\frac{x}{2}+3 \end{cases}$; $-1<\frac{2x+1}{x-2}<1$