TITRE DE LA LEÇON : Les nombres

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Algèbre

Niveau : Lycée - Classe : Seconde C

I-Chiffres et nombres

Le système de numération usuel, est le système décimal. Il contient dix symboles appelés chiffres : 0,1, 2,3,4,5,6,7,8 et 9. (0,2,4,6 ,8 sont les chiffres pairs et 1,3,5,7,9 sont les chiffres impairs)
Un nombre est formé des chiffres.
D'une manière générale, tous les nombres pairs sont représentés par : $2n$ et tous les nombres impairs par :
$2n+1$, où n est un entier naturel.

II-Ensembles des nombres

1- Notion d'ensemble

Un ensemble est une collection (ou un regroupement) d'objets distincts.
Ces objets sont appelés : Eléments de l'ensemble.

Exemple : $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$: Ensemble des chiffres pairs.
4 est un élément de A, on écrit : $4 \in A$;
3 n'est pas élément de A, on écrit : $3 \notin A$;
$B = \{0,2,4\}$ est un sous-ensemble de A, on écrit : $B \subset A$.

Remarque

- ✓ *On peut écrire un ensemble en extension ou en compréhension (par une propriété caractérisant ses éléments)*
  Exemples $A = \{0,2,4,6,8\}$ *: Ecriture en extension de l'ensemble A.*
  $E = \left\{x \in \mathbb{R},\ x = \frac{2n}{n+1};\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ *: Ecriture en compréhension de E.*
- ✓ *Un ensemble peut être fini ou infini.*
- ✓ *L'ensemble des éléments d'un ensemble E qui n'appartiennent pas à un sous-ensemble A de E, est appelé le complémentaire de A dans E. On note :* $\bar{A}$ *ou* C_E^A *ou* $E \setminus A$ *ou* $E - A$:
  $\bar{A} = C_E^A = E \setminus A = E - A.$

2- Ensembles des nombres usuels

On distingue différentes familles de nombres et leur ensemble :
$\mathbb{N} = \{0,1, 2, 3, 4, 5,6,7 ,8,9,10, \dots\}$: Ensemble des nombres entiers naturels (entiers positifs ou nuls)
$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$: Ensemble des nombres entiers relatifs (entiers positifs, négatifs ou nuls)
$\mathbb{D} = \{x = a.10^{-n}; a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$: Ensemble des nombres décimaux (nombres qui sont le quotient d'un entier par une puissance de 10 : 10^n; $n \in \mathbb{N}$)
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^*\right\}$: Ensemble des nombres rationnels (nombres qui peuvent s'écrire comme un quotient de deux entiers).
$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels (tous les nombres rationnels et irrationnels).

Remarque:

- $\mathbb{N}$ est contenu dans, $\mathbb{Z}$ dans, $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, ce qui s'écrit : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- Les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ sont :

$\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$; $\mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$; $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
, $\mathbb{R}^*_+ =]0; +\infty[$, et $\mathbb{R}^*_- =]-\infty; 0[$.

- $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
- $]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$ est le complémentaire de $[-1\,; 2]$ dans $\mathbb{R}$

3- Propriétés:

-Tout nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers tels que : $PGCD(p, q) = 1$;
-Tout nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'une suite décimale illimitée périodique ;
Exemple : $\frac{14}{3} = 4{,}666666666 \ldots$ est un nombre rationnel
-Toute d'une suite décimale illimitée périodique peut s'écrire sous la forme d'une fraction ;
Exemple : $0{,}333333333 \ldots = \frac{1}{3}$
-Tout nombre irrationnel peut s'écrire sous la forme d'une suite décimale illimitée non périodique .
C'est un nombre réel qui ne peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.
Exemples : $\pi = 3{,}141\,592\,653\,589 \ldots$;
$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562 \ldots$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or) sont des nombres irrationnels
Remarque *Pour déterminer la nature d'un nombre donné, on peut utiliser le raisonnement par l'absurde.*
Utiliser un raisonnement par l'absurde pour démontrer une proposition, consiste à supposer qu'elle est fausse, puis aboutir à une contradiction.

III- Propriétés de l'ensemble $\mathbb{R}$:

$\boldsymbol{P_1}$) $(\mathbb{R}, +)$ **est un groupe commutatif ou Abelien** :

$-\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$, $a + b = b + a$. On dit que l'addition dans $\mathbb{R}$ est commutative (commutativité)
$-\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}$, $a + (b + c) = (a + b) + c$. On dit que l'addition dans $\mathbb{R}$ est associative (associativité)
$-\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}$, $a + 0 = 0 + a = a$. On dit que 0 est un élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{R}$
$-\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}, \exists a' \in \mathbb{R}, a + a' = 0$. On dit que l'opposée de a (qui est $a' = -a$) est un élément symétrique pour l'addition dans $\mathbb{R}$

$\boldsymbol{P_2}$) $(\mathbb{R}, \times)$ **est un groupe commutatif ou Abelien :**

$-\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}, a \times b = b \times a$. On dit que la multiplication dans $\mathbb{R}$ est commutative(commutativité)
$-\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}, a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$. On dit que la multiplication dans $\mathbb{R}$ est associative(associativité)
$-\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^*, a \times 1 = 1 \times a = a$. On dit que 1 est un élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{R}$
$-\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^*, \exists a' \in \mathbb{R}^*, a \times a' = 1$. On dit que l'inverse de a (qui est $a' = \frac{1}{a}$) est un élément symétrique pour la multiplication dans $\mathbb{R}$
$\boldsymbol{NB}$: O est un élément absorbant pour la multiplication dans $\mathbb{R}$

$\boldsymbol{P_3}$) **La multiplication est distributive par rapport à l'addition :**

$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}, a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Donc : $(\mathbb{R}, +, \times)$ **vérifiant les propriétés $\boldsymbol{P_1}$) , $\boldsymbol{P_2}$) et $\boldsymbol{P_3}$)** est un corps commutatif.

Exercice 1 :

Montrer, en utilisant le raisonnement par l'absurde que : $\frac{\pi}{4} \notin \mathbb{Q}$.

Solution : Supposons que $\frac{\pi}{4} \in \mathbb{Q}$.

Alors $\frac{\pi}{4} = \frac{a}{b}$ est irréductible et $\pi = 4 \times \frac{a}{b}$.

Ainsi, π serait aussi un nombre rationnel, ce qui est faux. D'où $\frac{\pi}{4} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2 :

Montrer que : $\left(2+\frac{5}{6}\right) \in \mathbb{Q}$; $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} \in \mathbb{N}$; $\frac{3}{4} \in \mathbb{D}$.

Exercice 3 :

Ecrire sous la forme d'une fraction irréductible, chacun des nombres rationnels :

$p = 2{,}3131313131 \ldots$; $a = 0{,}0048.$; $q = 1{,}222222222 \ldots$; $t = 1{,}8333333333 \ldots$

Exercice 4 :

Soit le nombre réel ; $X = 0{,}181818182 \ldots$.

1- Montrer que : $X = \frac{2}{11}$
2- En déduire l'écriture factionnaire du nombre du nombre : $X = 6{,}181818182$.

Exercice 5 :

Montrer, en utilisant le raisonnement par l'absurde que, $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.