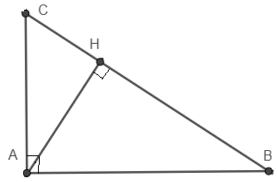
TITRE DE LA LEÇON : RELATIONS METRIQUES DANS UN TRIANGLE

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Géométrie

Niveau : Lycée - Classe : Seconde C

I- Relations métriques dans un triangle rectangle



Soient ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$, alors :

- $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- $BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$
- $CA^2 = \overline{CH} \times \overline{CB}$
- $AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC} = \overline{BH} \times \overline{HC}$

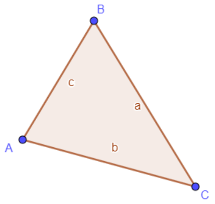
Conséquence :

$BA^2 \times CA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC} \times \overline{CH} \times \overline{CB} \Rightarrow AB \times AC = AH \times BC$; $\frac{\mathbf{1}}{AH^2} = \frac{\mathbf{1}}{AB^2} + \frac{\mathbf{1}}{AC^2}$.

II-Relations métriques dans un triangle quelconque

1- Théorème d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle quelconque tel que : $BC = a,\ AC = b$ et $AB = c$.



Alors :

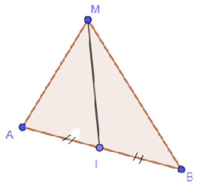
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c\cos\hat{A}$.

Par permutation circulaire, on obtient :

$b^2 = a^2 + c^2 - 2a.c\cos\hat{B}$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2a.b\cos\hat{C}$

2- Théorème de la médiane

Soient ABM un triangle quelconque, I milieu de $[AB]$ et (MI) la médiane relative au côté $[AB]$.



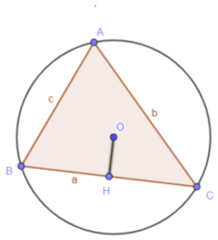
Alors :

- $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$
- $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}$

3- Théorème des sinus ou triangularisation

Soit ABC un triangle quelconque dont l'aire est S, tel que : $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.
Soit (C) le cercle de centre O et de rayon de longueur R, circonscrit au triangle ABC et H, le projeté orthogonal de O sur $[BC]$.



Alors : $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = \frac{abc}{2S} = 2R$

Exercice 1 :

L'unité choisie, est le centimètre (cm).
ABC est un triangle rectangle en A tel que : $\mathrm{AB} = 6{,}4$ et $\mathrm{AC} = 4{,}8$.

1- Construis la figure.
2- Calcule la longueur BC.
3- Sur la demi-droite d'origine B contenant A, place le point E tel que : $\mathrm{BE} = 10$.
4- Calcule les longueurs AE et CE.
5- Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite (CE). Calcule les longueurs HE et HC.

Exercice 2 :

ABC est un triangle tel que : $AB = 4, AC = 7$ et mes$\hat{A} = 120°$.
On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AC]$.
On appelle R la longueur du rayon du cercle circonscrit à ce triangle et S l'aire de ce triangle.

1- Faire la figure.
2- Calculer la longueur BC.
3- Déterminer les mesures de chacun des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$.
4- Calculer la longueur de chacun des segments : $[BJ]$ et $[AI]$ où (BJ) et (AI) désignent respectivement les médianes relatives à ces segments.
5- Déterminer R et S.