TITRE DE LA LEÇON : Valeur absolue dans IR
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Algèbre
Niveau : Lycée - Classe : Seconde C

I- Rappel

1- Définition :

On appelle valeur absolue d'un nombre réel x, notée :$|x|$ le nombre réel positif ou nul défini par : $|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ \ x \leq 0 \end{cases}$.

Remarque : $|x| = \underset{x \in \mathbb{R}}{Sup(x;-x)}$

2-Propriétés : Pour tous nombres réels x et y et pour tout entier relatif n .

- $|x| \geq 0$; $|x^2| = |x|^2 = x^2$; $|-x| = |x|$; $|x^n| = |x|^n$;
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$;
- $\sqrt{\boldsymbol{x^2}} = |\boldsymbol{x}|$ **;** $x \leq |x|$; $-x \leq |x|$;
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y\ ou\ x = -y$;
- $|x.y| = |x|.|y|$; $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ **;**
- $|x - y| = |y - x| = d(x;y)$ **;**
- **Inégalité triangulaire :** $|x + y| \leq |x| + |y|$ ou $|x - y| \leq |x| + |y|$

Remarque: $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$; $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$

II-Valeur absolue et intervalles

1- Théorème Soient a et r deux nombres réels tel que : $r \geq 0$

- $|\boldsymbol{x}| \leq \boldsymbol{r} \Leftrightarrow -\boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{r} \Leftrightarrow x \in [-r;r]$
- $|\boldsymbol{x}| \geq \boldsymbol{r} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{r}$ **ou** $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{r} \Leftrightarrow x \in]-\infty;-r] \cup [r;+\infty[$
- $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| \leq \boldsymbol{r} \Leftrightarrow -\boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{r} \Leftrightarrow -\boldsymbol{r} + \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{r} + \boldsymbol{a} \Leftrightarrow x \in [a - r; a + r]$
- $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| \geq \boldsymbol{r} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \leq -\boldsymbol{r}$ **ou** $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{r} \Leftrightarrow x \in]-\infty; a - r] \cup [a + r; +\infty[$.

2- Traduction d'un intervalle avec la notation valeur absolue

On se propose de traduire avec la notation valeur absolue, l'intervalle : $[a;b]$, $]a;b[$, $[a;b[\ ou\ ]a;b]$.
Pour ce faire, on détermine :

- Le centre ou le milieu de l'intervalle : le réel : $c = \frac{a+b}{2}$;
- L'amplitude ou la longueur de l'intervalle : le réel positif : $A = b - a$
- Le rayon ou l'incertitude de l'intervalle : le réel : $r = \frac{b-a}{2}$.

Donc $x \in [a;b] \Leftrightarrow |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}| \leq \boldsymbol{r}$**.**
Par conséquent, $x \in]-\infty; a[\cup]b; +\infty[\Leftrightarrow |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}| > \boldsymbol{r}$**.**

Remarque : Le complémentaire de : $|x - a| \leq r$ dans $\mathbb{R}$ est : $|x - a| > r$.

3- Réunion et intersection d'intervalles : A et B sont deux intervalles de $\mathbb{R}$

- $A \cap B$ est un intervalle : ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B ;
- $A \cup B$: est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B

Remarque : La réunion de deux intervalles n'est pas toujours un intervalle

Exemple : $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ n'est pas un intervalle.

4- Simplification d'une expression contenant la valeur absolue
On se propose de simplifier une expression de la forme : $|x - a|$
Pour ce faire, on pose $|x - a| = 0$ et on dresse un tableau
On a : $|x - a| = 0 \Leftrightarrow x - a = 0 \Leftrightarrow x = a$

x	-00	a	+00
x-a	-	0	+
Ix-aI	-x+a	0	x-a

Si $x \in]-\infty; a]$, $|x - a| = -x + a$;
Si $x \in [a; +\infty[$, $|x - a| = x - a$.

Exercice 1 Ecris sans valeur absolue $A = |x + 2| + 2x$
Solution : Ecrivons A sans valeur absolue
Posons :$|x + 2| = o \Leftrightarrow x + 2 = o \Leftrightarrow x = -2$

x	-oo	-2	+oo
|x+2|	-x-2	0	x+2
A	x-2	0	3x+2

Si $x \in]-\infty; -2]$, $A = x - 2$;
Si $x \in [-2; +\infty[$, $A = 3x + 2$

Exercice 2 :
On donne $A = \{x \in \mathbb{R}; |1 - 2x| > 3\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R}; |x| \leq 3\}$.
Montrer que : $B = [-3 ; 3]$ et $A =]-\infty; -1[\cup]2 ; + \infty[$. En déduire $A \cap B$ et $A \cup B$.

Exercice 3 :
On donne deux sous-ensembles de IR : $E = \{x \in IR ; |x + 1| \geq 3\}$ et $F =]-3;7[$.
1-Montrer que $E = A \cup B$ où $A =]-\infty;-4]$ et $B = [2;+\infty[$.
2-Déterminer, si possible, les éléments particuliers (minorant, majorant, minimum, maximum) de A, B et F.

Exercice 4

On considère les ensembles E et F tels que : $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}/|\boldsymbol{x} - \mathbf{3}| \geq \mathbf{5}\}$ **et**

$\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}/\ \mathbf{2} \leq |\boldsymbol{x} - \mathbf{5}| \leq \mathbf{4}\}$**.**

1-Ecrire E et F sous forme d'intervalles

2-Déterminer, alors les intervalles : $E \cup F$ et $E \cap F$

Exercice 5

On donne $A =]-1; 5[$ et $B =]-\infty; -2[\cup]4; +\infty[$

a)Traduire A et B avec la notation valeur absolue.

b) Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.