TITRE DE LA LEÇON : VECTEURS DU PLAN : Bases et repères du plan
Discipline : Mathématiques
Sous-discipline : Géométrie
Niveau : Lycée - Classe : Seconde C

1- Déterminant de deux vecteurs

Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$deux vecteurs du plan muni d'un repère.

Le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté : $det(\vec{u},\vec{v})$, est le réel défini par : $det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

2- Base du plan

On appelle base du plan vectoriel $\mho$, tout couple $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ de vecteurs non colinéaires :
$(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une base du plan vectoriel si, seulement si : $det(\vec{\imath},\vec{\jmath}) \neq 0$.

3- Repère du plan

Le triplet $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère du plan si, et seulement si, $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est une base du plan vectoriel $\mho$, c-à-d $det(\vec{\imath},\vec{\jmath}) \neq 0$.

4- Changement de repère (d'origine) sur les coordonnées d'un point du plan

Soit un point M de coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $(x';y')$ dans le repère $(O';\vec{\imath},\vec{\jmath})$ où $O'(a;b)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On a : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ (1); $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ (2)

Fixons O' dans (1): $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \Leftrightarrow \overrightarrow{O'M} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} - \overrightarrow{OO'} \Leftrightarrow$

$x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} = -a\vec{\imath} - b\vec{\jmath} + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \Leftrightarrow x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} = (x-a)\vec{\imath} + (y-b)\vec{\jmath} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}.$

5- Changement d'échelle (de vecteurs de base) sur les coordonnées d'un point du plan

Soit un point M de coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $(x';y')$ dans le repère $(O;k\vec{\imath},k'\vec{\jmath})$ où k et k' sont des réels non nuls.

Alors : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ (1) et $\overrightarrow{OM} = x'(k\vec{\imath}) + y'\left(k'^{\vec{\jmath}}\right)(2)$

En comparant (1) et (2), on obtient : $\begin{cases} x' = \frac{x}{k} \\ y' = \frac{y}{k'} \end{cases}.$

6- Changement de repère et d'échelle sur les coordonnées d'un point du plan

Soit un point M de coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $(x';y')$ dans le repère $(O';\vec{u},\vec{v})$ où $O'(a;b)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On a : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ (1); $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{u} + y'\vec{v}$ (2) avec $\vec{u} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \alpha'\vec{\imath} + \beta'\vec{\jmath}$

Fixons O' dans (1): $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \Leftrightarrow \overrightarrow{O'M} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} - \overrightarrow{OO'} \Leftrightarrow$

$x'(\alpha\,\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}) + y'(\alpha'\,\vec{\imath} + \beta'\vec{\jmath}) = -a\vec{\imath} - b\vec{\jmath} + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \Leftrightarrow$

$$(\alpha x' + \alpha' y')\vec{\imath} + (\beta x' + \beta' y')\vec{\jmath} = (x-a)\vec{\imath} + (y-b)\vec{\jmath} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} \alpha x' + \alpha' y' = x - a \\ \beta x' + \beta' y' = y - b \end{cases}$. On résout ce système d'inconnues x' et y'.

7- Coordonnées d'un point et d'un vecteur dans un repère du plan

- Un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan étant donné. Pour tout point M, il existe un couple unique (x, y) de nombres réels tels que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
  (x, y) sont les coordonnés du point M dans ce repère. On note : $M(x; y)$
  x : l'abscisse ; y: l'ordonnée.
- Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ sont données par : $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
  On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}(x, y)$.
- Le vecteur bipoint $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$;
- Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$;
- La distance de deux points A et B est donnée par : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$;
- La norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est donnée par : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux si, et seulement si : $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$
- $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée du plan si, et seulement si : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ et $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Exercice 1 :

1- $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base du plan vectoriel. $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont deux vecteurs de ce plan tels que :
$\vec{u} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de ce plan vectoriel.

2-Dans le repère cartésien $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points $A(-3;\ 2)$, $B(-1;\ 1)$, $C(0; 3)$.

a) Déterminer les coordonnées du point D pour que le quadrilatère ABDC soit un parallélogramme.

b) Placer ces points dans le repère cartésien $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

c) Démontrer que $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan. Déterminer les coordonnées des points A,B,C et O dans ce repère.

d) Soit M un point de coordonnées $(2 ;\ -3)$ dans le repère $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Trouver ses coordonnées dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, puis dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

e) Le point G a pour coordonnées $(-2 ; -1)$ dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.Trouver ses coordonnées dans l'ancien repère $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 2 : Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on donne les vecteurs
$\vec{u} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -3\vec{\imath} + \alpha\vec{\jmath}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

1-Déterminer le réel α pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

2- Dans la suite, on pose : $\alpha = 2$.

a) Montrer que $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base du plan vectoriel.

b) Calculer le produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

c) En déduire la valeur numérique du cosinus de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

d) En utilisant les résultats précédents, calculer la norme :$\|3\vec{u} - 2\vec{v}\|$.

e) On pose : $\vec{a} = -3\vec{\imath}$ et $\alpha = 2$. Ecrire le vecteur : $\vec{w} = \frac{1}{3}\vec{u} - \frac{2}{5}\vec{v} + \frac{4}{3}\vec{a}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{\imath}$ *et* $\vec{\jmath}$.

Exercice 3 : $(\vec{a}, \vec{b})$ est une base du plan vectoriel.

$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont deux vecteurs de ce plan tels que : $3\vec{u} - 2\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ et $\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$

1- Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{a}$ sont colinéaires. (On pourra résoudre le système à deux inconnus).

2- Exprimer $\vec{v}$ à l'aide des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. En déduire les composantes scalaires des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$.

3- Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base du plan vectoriel.

4- Ecrire $\vec{b}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.