TITRE DE LA LEÇON : VECTEURS DU PLAN : Calculs vectoriels

Discipline : Mathématiques

Sous-discipline : Géométrie

Niveau : Lycée - Classe : Seconde C

1- Caractéristiques principales d'un vecteur

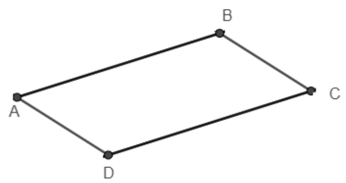
A tout couple (A, B) de points du plan, est associé un vecteur $\overrightarrow{AB}$ caractérisé par :

$$\begin{cases} -sa\ direction: celle\ de\ la\ droite\ (AB): famille\ de\ droites\ parallèles\ à\ (AB) \\ -son\ sens: celui\ de\ A\ vers\ B \\ -sa\ norme\ \|\overrightarrow{AB}\|: la\ longueur\ (ou\ distance)\ AB. \end{cases}$$

2- Egalité vectorielle et ses conséquences

Deux vecteurs sont égaux, s'ils ont les mêmes caractéristiques (même direction, même sens, même norme).

- **Propriété1:**



-

✓ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors le quadrilatère ABCD est un parallélogramme ;

✓ Si le quadrilatère ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. (On a aussi : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$.)

- **Propriété2 :**

✓ Si un point M est le milieu de $[AB]$, alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. (On a aussi : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$) ;

✓ Si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ou $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$, alors M est le milieu de $[AB]$.

- **Propriété3:**

Si $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, alors on dit que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ et on écrit : $t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

- **Propriété4:**

Soit O un point du plan . Pour tout vecteur $\vec{u}$ du pan, il existe un point unique M tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. (Lemme d'Euler)

3- Vecteurs colinéaires et ses conséquences

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
- L'égalité : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$; $(A \neq B; k\ un\ réel)$ signifie que :

✓ Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires ;

✓ Les droites (AM) et (AB) sont parallèles ;

✓ Les points A ; M et B sont alignés ;

✓ Le point M a pour abscisse k dans le repère (A, B)

- ✓ $\|\overrightarrow{AM}\| = |k|\|\overrightarrow{AB}\|$

NB : Pour tout vecteur non nul $\vec{u}$, il existe deux et deux vecteurs unitaires colinéaires à $\vec{u}$: $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et $-\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$

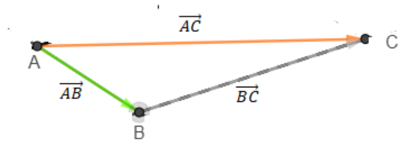
4- Addition de vecteurs

Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{BC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$, trois vecteurs, alors le vecteur ; $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ est appelé somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$**.**

a- Relation (ou égalité) de Chasles :

A, B et C sont trois points du plan. On applique la relation de Chasles, si dans une somme des vecteurs, l'extrémité du premier vecteur est l'origine du deuxième vecteur. On note : $\underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}_{\text{Relation de Chasles}}$.

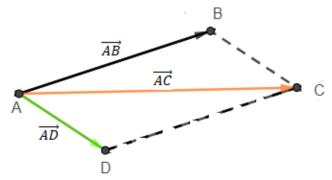
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, dans ce cas, sont dits : vecteurs consécutifs.



b- Règle du parallélogramme (décomposition d'un vecteur)

Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$, trois vecteurs du plan.

Si $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, alors ABCD est un parallélogramme (C'est la règle du parallélogramme)



c- Combinaison linéaire :

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan.
Le vecteur $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si, et seulement si, il existe des nombres réels α et β tels que : $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

5- Propriétés Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan et pour tous réels α et β

- ✓ $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$; $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;
- ✓ $\alpha(\vec{u} + \vec{v})\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$; $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha.\beta)\vec{u}$; $1.\vec{u} = \vec{u}$;
- ✓ $\alpha\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$; $\alpha\vec{u} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$;
- ✓ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$; $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$; $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$;
- ✓ $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Exercice 1 :

On considère un triangle ABC. Soient I, J et K les milieux respectifs des côtés $[\mathrm{AB}]$, $[\mathrm{BC}]$ et $[\mathrm{CA}]$.

1- Construis le point D tel que : $\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$, puis démontre que les points A, J et D sont alignés.
2- Soit le point E tel que : $\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{BE}}$. Démontre que C est le milieu de $[\mathrm{DE}]$.
3- Soit le point F tel que : $\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \overrightarrow{\mathrm{CF}}$. Justifie que les triangles ABC et DEF ont le même centre de gravité.
4- Démontre que : $\overrightarrow{\mathrm{F}\mathbf{A}} = \overrightarrow{\mathbf{A}\mathrm{E}}$. Que peux-tu dire de A par rapport au segment$[\mathrm{FE}]$?

Exercice 2:

Soit ABCD un parallélogramme.

1- Construis les points E, F, G et H tels que: $\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{DA}}$; $\overrightarrow{\mathbf{AF}} = \frac{5}{4}\overrightarrow{\mathbf{AB}}$; $\overrightarrow{\mathrm{BG}} = \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \frac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$.
2- Quelle est la nature du quadrilatère EFGH ?

Exercice 3:

ABC est un triangle. On considère I milieu du segment [AB] et H un point tel que :
$\overrightarrow{\mathrm{HA}} + \overrightarrow{\mathrm{HB}} + \overrightarrow{\mathrm{HC}} = \vec{0}$.

1- Démontre que pour tout point M du plan : $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}$.
2- Démonte que les points I, H et C sont alignés, puis justifie que H est un point de [IC].

Exercice 4 : ABCD est un parallélogramme. On désigne par E et F les points tels que :
$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.

1-Construire les A', B' et C', milieux respectifs des cotés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

2-Etablir les égalités vectorielles : $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$

3-Montrer que les points C, E et F sont alignés.

4-Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Démontrer que :
$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$; $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$.

Exercice 5 : ABCD est un parallélogramme.

1-Construire les points E, F et G tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$.

2-Exprimer $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{GF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AD}$. En déduire que les droites (BE) et (FG) sont parallèles.

3-Soit H, le point défini par : $\overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{CG}$. Montrer que les points E, F et H sont